



(Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke)

**Titre :** Espace-temps de Minkowski et univers d'Einstein

**Auteur(s) :** Yannick Lebrun

**Revue :** CaMUS (Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke)

**Volume :** 4

**Année :** 2013

**Pages :** 92-111

**Éditeur :** Université de Sherbrooke. Département de Mathématiques

**URI :** Repéré à : <http://camus.math.usherbrooke.ca/revue.html>

*Page vide laissée intentionnellement*

# Espace-temps de Minkowski et univers d'Einstein

Yannick Lebrun

**RÉSUMÉ** Le but de cet article est d'initier le lecteur à des géométries associées à la théorie de la relativité en physique. Nous présentons tout d'abord l'espace-temps et y introduisons la géométrie de Minkowski. Par la suite, nous nous intéressons à l'univers d'Einstein avec une attention marquée sur sa visualisation. Finalement, nous discutons brièvement du fait que ce dernier compactifie l'espace-temps.

## 1 Introduction

Le temps nous semble être une chose immuable : une chose qui s'écoule constamment, peu importe notre point de vue. Or, depuis Albert Einstein et sa théorie de la relativité, cette intuition ne correspond plus avec la représentation physique de notre réalité. La perception du temps, au même titre que celle des distances, dépend de notre point de vue. Autrement dit, elle est relative à notre référentiel. Cette conclusion nous amène à considérer l'espace et le temps comme des entités indissociables. Leur union forme une nouvelle structure : l'espace-temps.

L'utilisation de l'espace-temps passe principalement par l'étude du mouvement. La branche de la physique mécanique qui étudie le mouvement des objets est la cinématique. Or, l'outil principal de la cinématique est la géométrie. Ainsi, les idées reliées à l'espace-temps peuvent être interprétées dans un contexte plus mathématique. C'est le point de vue que nous emploierons majoritairement dans cet article.

À la section 2, nous présentons plus formellement l'espace-temps et définissons les photons et les cônes de lumière. La géométrie de Minkowski, qui nous permet de traiter de l'espace-temps de Minkowski, y est introduite par la suite. À la section 3, nous abordons un espace semblable qui est l'univers d'Einstein. Nous discutons de ses principales caractéristiques et étudions les façons de le visualiser. Les photons et les cônes de lumière sont revisités afin de profiter de ces visualisations. Nous terminons avec la section 4 en établissant que l'univers d'Einstein est une compactification de l'espace-temps de Minkowski.

---

J'aimerais remercier Virginie Charette pour m'avoir supervisé tout au long de l'écriture et de la révision de cet article. Je lui suis aussi reconnaissant pour son support financier et sa disponibilité lors de mes recherches.

## 2 Espace-temps de Minkowski

Nous n'évoluons pas seulement dans l'espace, mais aussi à travers le temps. Ainsi, il est naturel de vouloir mener des calculs dans un référentiel dont les coordonnées ne sont pas uniquement spatiales. Dans cette section, nous effectuons un survol de l'espace-temps et de la géométrie qui lui est associée.

### 2.1 Espace-temps et cône de lumière

L'espace  $\mathbb{R}^3$  est le modèle souvent employé pour représenter ce que notre œil perçoit. Il est muni d'un système de coordonnées  $[x, y, z]$  issu d'une base avec lequel nous pouvons décrire la position des objets. Lorsque nous ajoutons une coordonnée temporelle  $t$ , nous parlons d'*espace-temps*. Dans ce dernier, un point  $[x, y, z, t]$  est plutôt appelé un *événement* afin de mettre l'accent sur la nouvelle dimension.

Un avantage important de l'espace-temps est qu'il décrit les changements de position au fil du temps. La trajectoire d'un objet ponctuel (c'est-à-dire un objet tenant en un point) illustrée dans l'espace-temps porte le nom de *ligne d'univers*<sup>1</sup>. Une ligne d'univers n'est pas une courbe quelconque, car elle est nécessairement continue et ne peut revenir en arrière dans le temps. Ces restrictions justifient la définition plus formelle ci-dessous :

**Définition 2.1.** Une *ligne d'univers* est une fonction continue  $m : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $I$  étant un intervalle, telle que

$$m(t) = [x(t), y(t), z(t), t].$$

Nous admettons la possibilité que  $m$  ne soit pas différentiable en certains points. Ces points indiquent des changements brusques du vecteur vitesse :

$$m'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t), 1].$$

L'image de  $m$  étant dans un espace à quatre dimensions, nous nous limitons ici à un ou deux axes spatiaux pour sa visualisation. La figure 1 présente un exemple de ligne d'univers dans le plan  $y, z = 0$ .

Un objet important de l'espace-temps est le cône de lumière, mais afin de l'aborder, nous devons passer par les photons. En physique, un *photon* est défini comme étant une particule de lumière<sup>2</sup>. Dans le cadre de cet article, ce terme désignera plutôt la ligne d'univers de la particule par souci de cohérence avec l'univers d'Einstein décrit dans [LD12]. Nous l'abordons à la section 3.

Une particule de lumière se déplace en ligne droite, à une vitesse constante d'environ  $c = 3 \times 10^8$  m/sec, dans le vide. À cette échelle, le mètre n'est pas approprié pour illustrer les lignes d'univers, car les pentes sont trop abruptes. Par conséquent, nous pouvons plutôt utiliser la *seconde-lumière* qui est la distance parcourue par la lumière en une seconde. Ce choix, en gardant la seconde comme

<sup>1</sup>De l'anglais *worldline*.

<sup>2</sup>À condition de considérer la lumière comme un faisceau de particules.

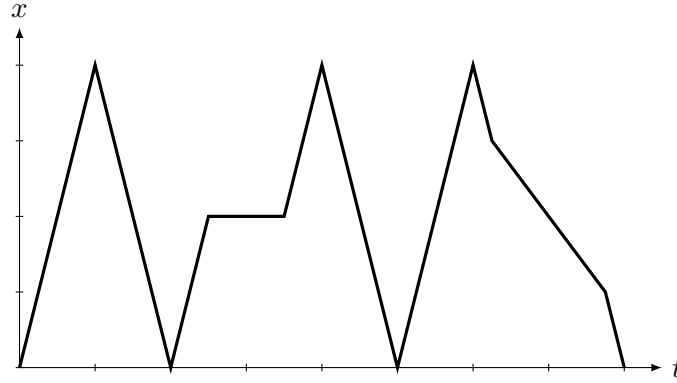


FIGURE 1 – Ma ligne d’univers lorsque je fais des va-et-vient dans un couloir représenté ici par l’axe  $x$ . La vitesse (instantanée) de mon déplacement est donnée par la pente de la courbe. Celle-ci varie selon l’intensité de mes réflexions. Lorsqu’on m’arrête pour discuter, ma ligne d’univers devient parallèle à l’axe  $t$ .

unité temporelle, permet de diminuer la pente des photons à 1. Cette nouvelle échelle est plus pratique en relativité et nous l’utiliserons pour le reste de cette sous-section. Ainsi, si  $\| \cdot \|$  dénote la norme habituelle, nous pouvons dire :

**Définition 2.2.** Un *photon* est une ligne d’univers  $m(t)$  paramétrant une droite de pente 1 : pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et pour tout  $k \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\| [x(t+k), y(t+k), z(t+k)] - [x(t), y(t), z(t)] \| = k.$$

Considérons l’expérience suivante tirée de la section 1.1 de [Cal00]. Supposons que nous plaçons une source ponctuelle à l’origine  $[0, 0, 0]$ . Supposons de plus que celle-ci projette un éclair lumineux au temps  $t = 0$ . Dans cette situation, des particules de lumière sont propulsées partout dans l’espace à une vitesse constante de 1 seconde-lumière/sec. Après  $t$  secondes, toute particule sera à une distance de  $t$  secondes-lumière de l’origine. Cela revient à dire que si  $[x, y, z]$  désigne les coordonnées spatiales d’une telle particule, alors l’équation suivante est satisfaite :

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2. \quad (1)$$

Réciproquement, tout événement  $[x, y, z, t]$  qui satisfait cette équation appartient à un photon, car les particules de lumière ont été propulsées dans toutes les directions. L’équation (1) décrit un cône et, plus particulièrement, un *cône de lumière* dans l’espace-temps. Dans l’expérience précédente, le choix de l’événement initial  $[0, 0, 0, 0]$  était arbitraire : toute autre origine est valable. Plus généralement :

**Définition 2.3.** Un *cône de lumière* est le milieu des événements qui, pour une source  $[x_0, y_0, z_0, t_0] \in \mathbb{R}^4$  donnée, satisfont à l’équation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = (t - t_0)^2.$$

Un cône de lumière peut aussi être défini de façon équivalente comme l'union de tous les photons passant par un événement donné.

En physique, il est considéré impossible que la vitesse d'un objet quelconque puisse dépasser celle de la lumière. À titre d'exemple, considérons un objet ponctuel  $O$  placé à l'origine de l'espace-temps et illustré à la figure 2. Si nous appliquons ce principe physique, nous en concluons que sa ligne d'univers doit toujours rester à l'intérieur du cône de lumière. Pour cette raison, nous appelons la partie intérieure  $t > 0$  du cône le *futur* de  $O$  et la partie  $t < 0$  le *passé* de  $O$ . Le cône de lumière joue un rôle important dans la causalité des événements, mais le traitement de ce sujet dépasse le cadre de cet article.

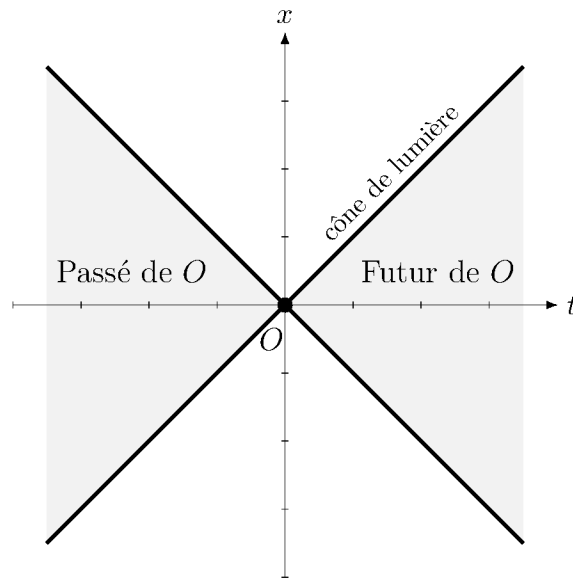


FIGURE 2 – Objet ponctuel  $O$  situé à l'origine de l'espace-temps avec son passé et son futur donnés par le cône de lumière. Une seule dimension spatiale est considérée afin de simplifier l'illustration.

Un postulat important dans la théorie de la relativité est que la vitesse de la lumière est indépendante du choix de référentiel galiléen. Autrement dit, un observateur mesurera toujours  $c$  m/sec peu importe qu'il soit stationnaire ou mobile à vitesse uniforme. Cela entraîne que les transformations habituelles permettant le passage d'un référentiel galiléen à un autre ne sont plus adéquates pour les cônes de lumière. La résolution géométrique de ce problème a mené à l'espace-temps de Minkowski.

## 2.2 Géométrie de Minkowski

Dans cette sous-section, tout vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  est sous la forme d'une matrice colonne  $[x_i]_{n \times 1}$ . De plus,  $I_{m \times m}$  désigne la matrice identité de dimension  $m$  et  $0_{m \times p}$  la matrice nulle de dimension  $m \times p$ .

Avec l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ , il est possible de parler de la norme d'un vecteur ou de l'angle entre deux vecteurs. L'outil à la base de ces concepts est un *produit scalaire* sur  $\mathbb{R}^n$ . Nous rappelons que c'est une fonction  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant aux trois conditions ci-dessous. Pour tous vecteurs  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  et scalaires  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :

1.  $f$  est une *forme bilinéaire* :  $f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  et  $f(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta f(\mathbf{u}, \mathbf{w})$  ;
2.  $f$  est *symétrique* :  $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  ;
3.  $f$  est *définie positive* : si  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ,  $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ .

Le produit scalaire habituellement utilisé est le produit scalaire *canonique*  $\bullet$ . Pour  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  exprimés dans la base canonique, il est défini par :

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{x}^T I_{n \times n} \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Avec ce dernier, les calculs de distance et d'angle se rapportent à la géométrie d'Euclide (dite *euclidienne*) qui est bien connue et répandue. Si nous voulons une géométrie différente, une option possible est de choisir un autre produit scalaire.

Supposons que les  $n-1$  premières coordonnées d'un vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  sont spatiales et que la dernière ( $x_n$ ) est temporelle. Un produit scalaire adéquat devrait idéalement distinguer la dernière coordonnée des autres afin de mettre l'accent sur sa dimension temporelle. Ainsi, nous pourrions considérer la forme bilinéaire suivante :

**Définition 2.4.** Pour  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  exprimés dans la base canonique, le *produit intérieur de Minkowski*  $\circ$  est défini par :

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} I_{(n-1) \times (n-1)} & 0_{(n-1) \times 1} \\ 0_{1 \times (n-1)} & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n.$$

Si nous posons  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ , cette équation devient :

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2. \quad (2)$$

La forme bilinéaire  $\circ$  est symétrique, mais elle n'est pas définie positive, car selon le choix de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x}$  peut être positif, nul ou négatif. L'absence de constance sur le signe de  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x}$  en fait une forme bilinéaire non seulement non définie positive, mais *non définie*. Par conséquent,  $\circ$  n'est pas un produit scalaire selon notre définition et porte plutôt le nom de *produit intérieur*<sup>3,4</sup>. Or, comme le produit scalaire canonique,  $\circ$  est *non dégénérée*, c'est-à-dire que si  $\mathbf{x}$  est non nul, alors il existe  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\mathbf{x} \circ \mathbf{v} \neq 0$ .

L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  muni du produit intérieur de Minkowski est noté  $\mathbb{R}^{n-1,1}$ . L'*espace-temps de Minkowski* désigne habituellement le cas spécifique  $\mathbb{R}^{3,1}$ , mais

<sup>3</sup>Le terme *produit intérieur* vient de l'anglais *inner product*.

<sup>4</sup>Certains auteurs gardent l'appellation *scalaire*.

il n'est ultimement pas fautif d'utiliser cette appellation pour  $\mathbb{R}^{n-1,1}$  étant donné que nous travaillons avec des coordonnées spatiales et temporelles. Les vecteurs de  $\mathbb{R}^{n-1,1}$  sont divisés en trois types selon le signe de  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x}$ . Nous dirons d'un vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$  qu'il est de type :

- *espace* si  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} > 0$  ;
- *lumière* si  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = 0$  ;
- *temps* si  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} < 0$ .

Il découle de (2) que  $\mathbf{x}$  est de type lumière si et seulement si l'équation suivante est vérifiée :

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = x_n^2.$$

La forme de cette équation implique que l'ensemble des vecteurs de type lumière est un cône. Si nous posons  $n = 4$ , nous retrouvons le cône de lumière (1) à l'origine de l'espace-temps. Les vecteurs de type espace sont à l'extérieur du cône et ceux de type temps à l'intérieur.

Nous pouvons calculer des distances et des angles avec le produit intérieur de Minkowski. Ces calculs s'inscrivent dans une nouvelle géométrie que nous appelons la *géométrie de Minkowski* ou *géométrie lorentzienne*. Avant de terminer cette section, nous en présentons quelques particularités. Toute personne voulant creuser davantage le sujet peut se référer à la section 2.3 de [Cal00].

### 2.2.1 Norme et intervalle

De façon analogue à la géométrie euclidienne, [Cal00] définit la nouvelle norme comme suit :

**Définition 2.5.** Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$ . La *norme de Minkowski* de  $\mathbf{x}$  est  $\|\mathbf{x}\|_{Min} = \sqrt{|\mathbf{x} \circ \mathbf{x}|}$ .

Notons que malgré son appellation,  $\|\cdot\|_{Min}$  n'est pas une norme à proprement parler. Cela est dû au fait qu'elle ne respecte pas l'inégalité du triangle, c'est-à-dire qu'il existe des vecteurs  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$  tels que

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_{Min} > \|\mathbf{x}\|_{Min} + \|\mathbf{y}\|_{Min}.$$

Un exemple simple est  $\mathbf{x} = [1, 1]^T$  et  $\mathbf{y} = [-1, 1]^T$  dans  $\mathbb{R}^{1,1}$ . Ces deux vecteurs sont de type lumière et ont une norme nulle, mais ce n'est pas le cas de  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = [0, 2]^T$  qui est de type temps. Bref, la norme de Minkowski ne correspond pas à notre notion intuitive de longueur.

En géométrie euclidienne, les vecteurs de même norme  $k \in \mathbb{R}^+$  forment la sphère centrée à l'origine de rayon  $k$ . En géométrie lorentzienne, un vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$  a une norme égale à  $k$  si et seulement si :

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = \pm k^2.$$



Si  $n = 2$ ,  $x = x_1$  et  $y = x_2$ , nous obtenons les équations ci-dessous associées à des hyperboles :

$$x^2 - y^2 = k^2 \quad , \quad x^2 - y^2 = -k^2.$$

La figure 3 illustre quelques exemples de ces courbes. Dans le cas général, les vecteurs de même norme forment une *hyperboloïde*.

Nous pouvons aussi définir la « distance » entre deux vecteurs de  $\mathbb{R}^{n-1,1}$  de la façon suivante :

**Définition 2.6.** Soient  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$ . L'*intervalle* entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  est  $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_{Min}$ .

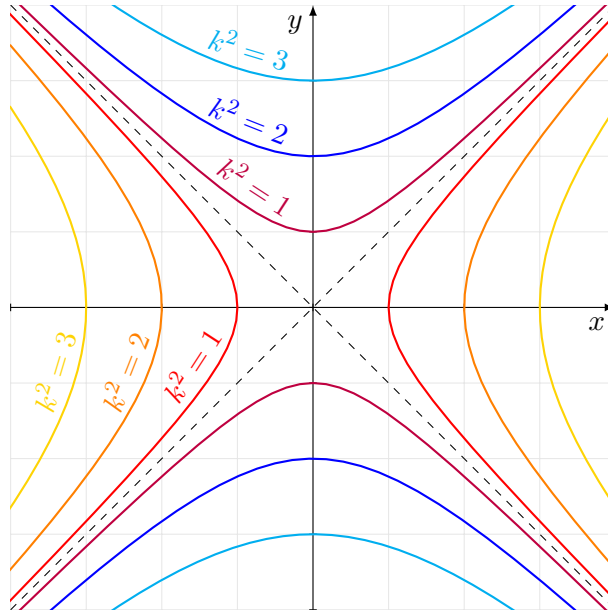


FIGURE 3 – Courbes  $x^2 - y^2 = k^2$  (rouge à jaune) et  $x^2 - y^2 = -k^2$  (mauve à cyan) pour quelques valeurs de  $k^2$ . Pour un  $k \in \mathbb{R}^+$  donné, ces deux hyperboles identifient tous les vecteurs dont la norme de Minkowski est  $k$ .

### 2.2.2 Isométries et groupe $O(n-1,1)$

Dans  $\mathbb{R}^n$ , nous pouvons déduire une métrique  $d$  de la norme euclidienne  $\|\cdot\|$  en posant  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ . Cette dernière fait de  $\mathbb{R}^n$  un exemple d'*espace métrique*. Dans le contexte d'un espace métrique, nous pouvons définir la notion d'isométrie qui est une transformation préservant les distances :

**Définition 2.7.** Soit  $X$  un ensemble muni d'une métrique  $d$ . Une *isométrie* de  $(X, d)$  est une fonction  $f : X \rightarrow X$  où, pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ ,  $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

La norme de Minkowski n'étant pas une norme, l'intervalle n'est donc pas une métrique de  $\mathbb{R}^{n-1,1}$ . Dans cet espace, le terme « isométrie » est plutôt employé pour décrire les transformations suivantes :

**Définition 2.8.** Une *isométrie* de  $\mathbb{R}^{n-1,1}$  est une fonction  $f : \mathbb{R}^{n-1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1,1}$  où, pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$ ,

$$(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})) \circ (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Il est bien connu que les isométries de  $\mathbb{R}^n$  sont des compositions de translations, de réflexions et de rotations. Partant de cela, il est possible de trouver des équivalents à ces trois transformations de base pour  $\mathbb{R}^{n-1,1}$ . Une translation sur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$  consiste à lui additionner un vecteur  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$  et a le même effet qu'une translation de  $\mathbb{R}^n$ . Si la coordonnée temporelle  $x_n$  n'est pas impliquée dans la transformation, les réflexions et les rotations reviennent aussi à celles de la géométrie euclidienne. Sinon, nous parlons plutôt de *réflexion hyperbolique* ou de *rotation hyperbolique*<sup>5</sup>.

Toute réflexion ou rotation sur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$  revient à une application linéaire. L'image d'une telle application est de la forme  $A\mathbf{x}$ , où  $A$  est une matrice de dimension  $n \times n$  avec coefficients dans  $\mathbb{R}$ . La notation  $M_n(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices possédant ces caractéristiques. Les réflexions et les rotations sont inversibles, impliquant de plus que  $A$  est inversible. Nous rappelons que l'ensemble des matrices  $A \in M_n(\mathbb{R})$  inversibles forment un groupe pour la multiplication matricielle. Ce dernier s'appelle le *groupe général linéaire* d'ordre  $n$  sur  $\mathbb{R}$  et est noté  $GL_n(\mathbb{R})$ . Or, toute application linéaire inversible n'est pas nécessairement une isométrie. Ce qui distingue les réflexions et les rotations, c'est qu'elles *préservent* le produit intérieur de Minkowski. Cela veut dire que, pour une matrice  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  associée à ce type de transformation,  $A\mathbf{x} \circ A\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ \mathbf{y}$  pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$ .

Nous en arrivons donc à la définition et à la proposition suivantes qui complètent la sous-section :

**Définition 2.9.** Le *groupe pseudo-orthogonal* de type  $(n-1,1)$ , noté  $O(n-1,1)$ , est l'ensemble  $\{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ préserve } \circ\}$ . L'opération du groupe est la multiplication matricielle.

**Proposition 2.10.** Une fonction  $t : \mathbb{R}^{n-1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1,1}$  est une isométrie de  $\mathbb{R}^{n-1,1}$  si et seulement si :

$$\mathbf{x} \mapsto t(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \text{où } A \in O(n-1,1) \text{ et } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n-1,1}.$$

### 3 Univers d'Einstein

Un autre espace dans lequel nous retrouvons des photons et des cônes de lumière est l'univers d'Einstein. Quoique cette appellation peut effrayer, l'univers d'Einstein n'est à la base qu'un espace projectif dans  $\mathbb{R}^n$  avec quelques conditions.

<sup>5</sup>Parfois appelée *transformation de Lorentz*. Elle préserve le cône de lumière d'un référentiel galiléen à un autre.

De plus, il présente plusieurs similarités avec l'espace-temps de Minkowski qui nous est maintenant familier. Dans cette section, nous définissons cet univers et en présentons quelques visualisations.

### 3.1 Définitions

Considérons l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{n+2}$  ( $n \geq 2$ ) dont les vecteurs  $\mathbf{x}$  sont représentés par des matrices colonnes  $[x_i]_{(n+2) \times 1}$ . De façon analogue à la section 2.2, nous allons munir cet espace d'un produit intérieur  $\langle, \rangle : \mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$  non défini et non dégénéré. Pour  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+2}$  exprimés dans la base canonique, nous posons :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1} - x_{n+2} y_{n+2}.$$

Si  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ , alors l'expression devient :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2. \quad (3)$$

L'espace  $\mathbb{R}^{n+2}$  muni du produit intérieur  $\langle, \rangle$  est noté  $\mathbb{R}^{n,2}$ . De même, le groupe des matrices  $M \in GL_{n+2}(\mathbb{R})$  préservant  $\langle, \rangle$  est noté  $O(n,2)$ .

Selon que  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$  soit positif, nul ou négatif, nous dirons du vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,2}$  qu'il est de type *espace*, *lumière* ou *temps*, respectivement, comme dans l'espace-temps de Minkowski. Cette terminologie nous mène à la définition suivante :

**Définition 3.1.** Le *cône de lumière*  $\mathbf{N}^{n,2}$  est l'ensemble des vecteurs de type lumière de  $\mathbb{R}^{n,2}$ .

À ce moment, nous avons presque décrit l'univers d'Einstein, car ce dernier est essentiellement  $\mathbf{N}^{n,2}$ . La différence est qu'à la place de travailler avec des vecteurs, nous travaillons plutôt avec des objets associables aux droites passant par l'origine. Pour créer de tels objets, nous regroupons les vecteurs de même direction dans une seule classe d'équivalence.

**Définition 3.2.** Deux vecteurs  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n,2}$  sont en *relation de colinéarité*, noté  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ , si et seulement s'il existe un scalaire  $k \in \mathbb{R}_*$  tel que  $\mathbf{x} = k\mathbf{y}$ . De plus, si  $k > 0$ , alors ils sont en *relation de colinéarité positive*, noté  $\mathbf{x} \sim_+ \mathbf{y}$ .

Les relations  $\sim$  et  $\sim_+$  sont des relations d'équivalence. Rappelons maintenant les concepts de classe d'équivalence et d'ensemble quotient :

*Rappel .* Soient  $E$  un ensemble et  $\equiv$  une relation d'équivalence. La *classe d'équivalence* d'un élément  $x \in E$  est  $\tilde{x} = \{y \in E \mid x \equiv y\}$ . L'ensemble des classes d'équivalence de  $E$  est appelé l'*ensemble quotient* de  $E$  par  $\equiv$  et est noté  $E/\equiv$ .

L'origine  $\mathbf{0}$  est l'unique point singulier de  $\mathbf{N}^{n,2}$ , c'est-à-dire l'unique point où le cône de lumière n'est pas différentiable. Par conséquent, il nous est préférable de plutôt considérer  $\mathbf{N}^{n,2} \setminus \{\mathbf{0}\}$  avant de passer au quotient par  $\sim$ .

**Définition 3.3.** Soit  $V$  un espace vectoriel. La *projectivisation* de  $V$ , notée  $\mathbb{P}V$ , est l'ensemble quotient de  $V \setminus \{\mathbf{0}\}$  par la relation d'équivalence  $\sim$ .

La fonction  $\mathbb{P} : V \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{P}V$ , envoyant chaque élément  $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$  vers sa classe d'équivalence pour  $\sim$ , porte aussi le nom de projectivisation.

**Définition 3.4.** L'univers d'Einstein issu de  $\mathbb{R}^{n,2}$ , noté  $Ein^{n-1,1}$ , est  $\mathbb{P}\mathbb{R}^{n,2} = (\mathbb{R}^{n,2} \setminus \{\mathbf{0}\})/\sim$ .

Si le quotient est plutôt effectué avec la relation de colinéarité positive  $\sim_+$ , nous obtenons un revêtement de  $Ein^{n-1,1}$ . La notion de revêtement n'est pas importante pour cet article et nous donnons la définition suivante pour des fins de visualisation seulement :

**Définition 3.5.** Le revêtement double de l'univers d'Einstein, noté  $\widehat{Ein}^{n-1,1}$ , est  $(\mathbb{R}^{n,2} \setminus \{\mathbf{0}\})/\sim_+$ .

Nous poussons l'idée que les éléments de  $Ein^{n-1,1}$  peuvent être interprétés comme étant des droites. Cela fait de l'univers d'Einstein un *espace projectif*. Ce concept s'inspire de la projection perspective dont le fonctionnement est similaire à la vision humaine. Lorsque nous regardons dans une direction donnée, nous ne voyons que l'objet le plus près de nous : les objets derrière ce dernier nous sont invisibles. Ainsi, l'information visuelle de la direction est résumée par l'objet en question. Le quotient par  $\sim$  donne un effet semblable dans un contexte géométrique. Les coordonnées d'un espace projectif portent le nom de *coordonnées homogènes*. Celles-ci sont habituellement écrites avec des deux-points « : » entre les valeurs.

Nous terminons cette sous-section avec deux objets importants de  $Ein^{n-1,1}$  : les photons et les cônes de lumière. Ces derniers possèdent des traits communs avec les objets de même nom dans l'espace-temps. Ces traits sont mis en évidence à la section 3.2.

**Définition 3.6.** Un *photon*  $\phi \subseteq Ein^{n-1,1}$  est la projectivisation d'un plan  $P$  de  $\mathbb{R}^{n,2}$ , où chaque vecteur  $\mathbf{x} \in P$  est de type lumière.

Autrement dit, considérons deux vecteurs linéairement indépendants  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n,2}$  tels que pour tous scalaires  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\langle \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} \rangle = 0.$$

L'ensemble des combinaisons linéaires de ces deux vecteurs,

$$P = \{\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

forme un plan de  $\mathbb{R}^{n,2}$  et  $\phi = \mathbb{P}P$  est un exemple de photon.

**Définition 3.7.** Le *cône de lumière* d'un élément  $\mathbf{x} \in Ein^{n-1,1}$ , noté  $L(\mathbf{x})$ , est l'union de tous les photons  $\phi$ , où  $\mathbf{x} \in \phi$ .

Une définition équivalente et parfois plus pratique d'un cône de lumière est donnée dans [LD12]. Nous la présentons sous la forme d'un lemme :

**Lemme 3.8.** Pour tout  $\mathbf{x} \in Ein^{n-1,1}$ ,  $L(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in Ein^{n-1,1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0\}$ .

### 3.2 Visualisation de l'univers d'Einstein

La condition  $n \geq 2$  sur  $\mathbb{R}^{n,2}$  entraîne que les éléments de l'univers d'Einstein ont au moins quatre coordonnées. Malheureusement, il est plutôt difficile de visualiser un espace de dimension supérieure à trois. Or, la dimension « réelle » de  $\widehat{Ein}^{n-1,1}$  n'est pas  $n+2$ , mais bien  $n$ . Ce fait est mis en évidence par la proposition 3.10. Avant de l'énoncer, nous rappelons que la notation  $S^{n-1}$  désigne la sphère unitaire de  $\mathbb{R}^n$ , soit

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

De plus, nous avons besoin de la relation d'équivalence suivante :

**Définition 3.9.** Deux vecteurs  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n,2}$  sont en *relation antipodale*, noté  $\mathbf{x} \pm \mathbf{y}$ , si et seulement si  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  ou  $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$ .

Voici maintenant le résultat. Pour une démonstration intuitive de ce dernier, le lecteur peut se référer à la section 2.2.1 de [LD12] :

**Proposition 3.10.** *L'espace  $\widehat{Ein}^{n-1,1}$  est homéomorphe à  $(S^{n-1} \times S^1)/\pm$  et  $\widehat{Ein}^{n-1,1}$  est homéomorphe à  $S^{n-1} \times S^1$ .*

D'une certaine façon, nous pouvons simplement retenir que  $\widehat{Ein}^{n-1,1}$  et  $S^{n-1} \times S^1$  sont le « même » espace. Cette interprétation est satisfaisante pour la section courante et la proposition 3.10 n'est revisitée que brièvement à la section 4. Notons toutefois que les espaces impliqués ici sont plus qu'homéomorphes et que la vérité implique des notions qui dépassent le niveau de l'article.

Quoique  $S^{n-1}$  est un ensemble de points dans  $\mathbb{R}^n$ , seulement  $n-1$  paramètres sont suffisants pour le décrire. Si nous prenons comme exemple le cercle

$$S^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\},$$

alors  $x_1 = \cos\theta$  et  $x_2 = \sin\theta$ , où  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Ainsi, le paramètre  $\theta$  identifie uniquement les points et fait de  $S^1$  un espace de dimension un. Si nous choisissons plutôt la sphère

$$S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

alors tout point  $\mathbf{x} \in S^2$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \end{bmatrix}^T, \quad \text{où } \psi \in [0, \pi] \text{ et } \theta \in [0, 2\pi).$$

Nous reconnaissons les formules associées au système de coordonnées sphériques. Dans le cas  $S^{n-1} \times S^1$  de la proposition, le nombre de paramètres est égal à  $(n-1)+1 = n$  d'où la dimension « réelle » de  $\widehat{Ein}^{n-1,1}$ . Nous pouvons raisonner ce résultat en réalisant que les éléments de  $\widehat{Ein}^{n-1,1}$  ne sont pas seulement des vecteurs de  $\mathbb{R}^{n,2}$ . En effet, ceux-ci doivent être de type lumière et sont regroupés en « demi-droites » par la relation d'équivalence  $\sim_+$ . Ces deux conditions diminuent d'une certaine façon la dimension.

Pour le reste de cette sous-section, nous nous intéressons à la visualisation de  $S^{n-1} \times S^1$  dans les cas  $n = 2$  et  $n = 3$ . Entre autres, nous illustrons des photons et des cônes de lumière dans ce modèle.

### 3.2.1 Visualisation de $S^1 \times S^1$

Nous savons que tout point  $\mathbf{x} \in S^1 \times S^1$  est de la forme

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}^T, \quad \text{où } \theta, \varphi \in [0, 2\pi). \quad (4)$$

Il peut en être de même pour tout vecteur de  $\widehat{Ein}^{1,1}$ , mais ce fait n'est pas immédiat. Afin de le voir, observons que  $\mathbf{y} \in \widehat{Ein}^{1,1}$  implique que  $\mathbf{y}$  est de type lumière. Il suit de l'expression (3) du produit intérieur  $\langle, \rangle$  que :

$$y_1^2 + y_2^2 = y_3^2 + y_4^2.$$

L'espace  $\widehat{Ein}^{1,1}$  étant projectifié, la définition 3.3 nous informe que l'origine  $\mathbf{0}$  n'est pas incluse. Par conséquent, les deux termes de cette égalité sont non nuls et la quantité

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{y_3^2 + y_4^2}}$$

est réelle et non nulle. Rappelons de plus que le revêtement double  $\widehat{Ein}^{1,1}$  est un espace quotienté par la relation de colinéarité positive  $\sim_+$ . Le vecteur  $\mathbf{y}$  est donc équivalent à tout vecteur  $\mathbf{z} \in \widehat{Ein}^{1,1}$ , où  $\mathbf{z} = k\mathbf{y}$  et  $k \in \mathbb{R}_*^+$ . Un candidat,  $(1/\nu)\mathbf{y}$ , se démarque des autres à la lumière du fait suivant :

$$\left(\frac{y_1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\nu}\right)^2 = \left(\frac{y_3}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{y_4}{\nu}\right)^2 = 1.$$

De cette équation, nous concluons que le vecteur  $(1/\nu)\mathbf{y}$  a bien la forme identifiée en (4). Ainsi, en plus d'avoir fourni des arguments à la proposition 3.10, nous avons trouvé une façon d'associer un vecteur quelconque de  $\widehat{Ein}^{1,1}$  à un point de  $S^1 \times S^1$  afin de le visualiser.

Pour ce qui est de la représentation de  $S^1 \times S^1$ , il est possible d'illustrer cet ensemble par un plan  $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ , où  $\theta$  et  $\varphi$  occupent les deux axes. Si nous considérerions plutôt  $(S^1 \times S^1)/\pm$ , alors un des deux paramètres devrait être limité à  $[0, \pi)$ . Sinon, nous afficherions à la fois un point  $\mathbf{x} \in (S^1 \times S^1)/\pm$  et son antipode  $-\mathbf{x}$  qui sont équivalents en vertu de la relation  $\pm$ . L'identification ci-dessous clarifie la situation :

$$\mathbf{x} \pm -\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \\ -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \pi) \\ \sin(\theta + \pi) \\ \cos(\varphi + \pi) \\ \sin(\varphi + \pi) \end{bmatrix}.$$

Le plan  $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$  présente le désavantage de ne pas rendre la relation antipodale visuellement claire. De plus, il nous serait intéressant d'avoir une représentation plus fidèle à la nature cyclique de  $S^1 \times S^1$ . C'est pourquoi, comme [LD12], nous préférons plutôt utiliser un *tore* ou beigne dans le langage familier.

Cet objet est une surface de révolution de rayon  $R$  issue d'un cercle de rayon  $r \leq R$  et contient bien deux copies de  $S^1$ . Nous utiliserons la paramétrisation donnée en (5) pour passer de  $S^1 \times S^1$  au tore. Pour les figures de cet article, les rayons choisis sont  $R = 2$  et  $r = 1$  :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} (R + r\cos\theta)\cos\varphi \\ (R + r\cos\theta)\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{bmatrix}. \quad (5)$$

La figure 4 montre le tore associé à  $S^1 \times S^1$  et identifie  $R$ ,  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  sur ce dernier. Un vecteur  $\mathbf{P} \in \widehat{Ein}^{1,1}$  et son antipode par la relation  $\pm$  sont aussi présents. Si nous voulions illustrer  $(S^1 \times S^1)/\pm$ , la limitation de  $\theta$  ou de  $\varphi$  à l'intervalle  $[0, \pi)$  nous laisserait avec un demi-tore.

### 3.2.2 Visualisation de $S^2 \times S^1$

Les paramétrisations du cercle  $S^1$  et de la sphère dans l'espace  $S^2$  ont déjà été discutées. Ainsi, nous pouvons déduire que tout point  $\mathbf{x} \in S^2 \times S^1$  s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi\cos\varphi \\ \sin\psi\sin\varphi \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \text{où } \psi \in [0, \pi] \text{ et } \varphi, \theta \in [0, 2\pi). \quad (6)$$

Nous choisissons cette paramétrisation en particulier dû à une convention concernant le point  $[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$  ; les autres paramétrisations possibles n'en sont pas moins valides. Dans tous les cas, nous pouvons montrer que tout vecteur  $\mathbf{y} \in \widehat{Ein}^{2,1}$  correspond aussi à la forme (6) moyennant une multiplication scalaire appropriée. La démarche à suivre est identique à celle pour  $\widehat{Ein}^{1,1}$  qui est présentée à la sous-section 3.2.1.

Nous pourrions représenter  $S^2 \times S^1$  par un espace avec  $(\psi, \varphi, \theta)$  comme système de coordonnées. Or, ici aussi, nous préférons un modèle qui facilite la visualisation des identifications issues de  $\pm$  :

$$\mathbf{x} \pm -\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\cos\psi \\ -\sin\psi\cos\varphi \\ -\sin\psi\sin\varphi \\ -\sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi - \psi) \\ \sin(\pi - \psi)\cos(\varphi + \pi) \\ \sin(\pi - \psi)\sin(\varphi + \pi) \\ \sin(\theta + \pi) \\ \cos(\theta + \pi) \end{bmatrix}.$$

L'idée utilisée par [LD12] est de ramener  $S^2$  à un *disque* ou « cercle plein » de rayon  $\pi$ , soit

$$\pi\mathcal{D}^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \pi\}.$$

La transformation employée est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\varphi \end{bmatrix}^T \mapsto \begin{bmatrix} \psi\cos\varphi & \psi\sin\varphi \end{bmatrix}^T.$$

Puisque  $\psi \in [0, \pi]$ , ce dernier est interprété comme un rayon dans  $\pi\mathcal{D}^2$ . Le paramètre  $\varphi$ , quant à lui, devient un angle de rotation. Cette transformation est correctement définie, sauf lorsque  $\psi = \pi$ , soit au point  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ . Dans ce cas,  $\sin\psi = 0$  et il est impossible de déterminer la valeur de  $\varphi$  associée au rayon  $\pi$ . Nous ferons donc correspondre l'image de ce point à la frontière du disque. Il arrive aussi que  $\sin\psi = 0$  si  $\psi = 0$ , mais le rayon nul entraîne que l'angle  $\varphi$  est sans importance : notre image est au centre du disque.

Si nous interprétons le troisième paramètre  $\theta \in [0, 2\pi)$  comme étant une hauteur, nous en arrivons à la paramétrisation suivante :

$$\begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi\cos\varphi \\ \sin\psi\sin\varphi \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \psi\cos\varphi \\ \psi\sin\varphi \\ \theta \end{bmatrix}.$$

Le solide résultant est un cylindre qui sera notre modèle pour  $S^2 \times S^1$ . La figure 5 affiche le cylindre et identifie  $\psi$ ,  $\varphi$  et  $\theta$  sur ce dernier. Un vecteur  $\mathbf{P} \in \widehat{Ein}^{2,1}$  et son antipode par la relation  $\pm$  sont aussi présents. Si nous voulions plutôt afficher  $(S^2 \times S^1)/\pm$ , le paramètre  $\theta$  est celui que nous limiterions à  $[0, \pi)$ . Dans ce cas, nous obtiendrions seulement la moitié inférieure du cylindre qui est identifiable sur la figure par la différence de coloration.

### 3.2.3 Visualisation de photons

Nous rappelons qu'un photon est la projectivisation d'un plan où chaque vecteur est de type lumière. Posons  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \subseteq \mathbb{R}^{n,2}$  la base d'un tel plan et  $\phi \subseteq Ein^{n-1,1}$  le photon qui lui est associé. Ainsi, pour tout  $\mathbf{x} \in \phi$ ,

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \quad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Or, puisque nous sommes dans  $Ein^{n-1,1}$ , un espace quotient,  $\mathbf{x}$  est un représentant d'une classe d'équivalence. En vertu de la définition de  $\sim$ , ce représentant peut être changé par un multiple scalaire non nul de  $\mathbf{x}$ . Par exemple, si  $\alpha \neq 0$ , alors :

$$\mathbf{x} \sim \frac{1}{\alpha}\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \mathbf{u} + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{v} = \mathbf{u} + t\mathbf{v}, \quad \text{où } t = \frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R}.$$

Si  $\alpha = 0$ , alors  $\mathbf{x} = \mathbf{v}$  tout simplement. Par conséquent, nous pouvons redéfinir  $\phi$ , de façon équivalente, par :

$$\phi = \{\mathbf{u} + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbf{v}\}.$$



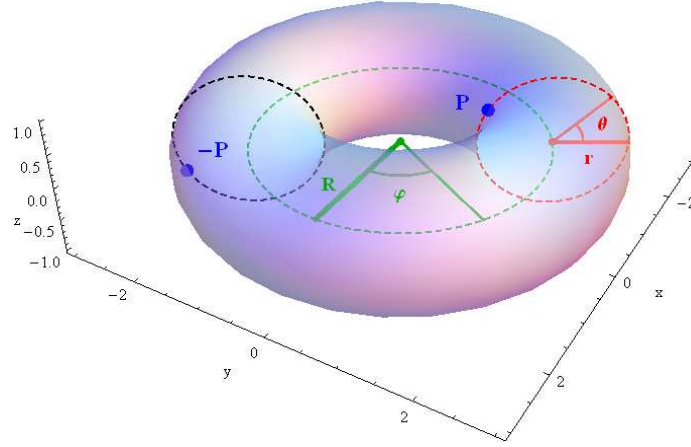


FIGURE 4 – Tore modélisant  $S^1 \times S^1$  avec les rayons  $R = 2$  et  $r = 1$  et les angles  $\theta$  et  $\varphi$  identifiés. Les deux points bleus correspondent à un vecteur quelconque  $\mathbf{P} \in \widehat{Ein}^{1,1}$  et son antipode  $-\mathbf{P}$  lorsqu'ils sont affichés sur le tore. Ces derniers montrent que la relation antipodale du revêtement double, quoique plus claire comparativement au plan, n'est pas conservée.

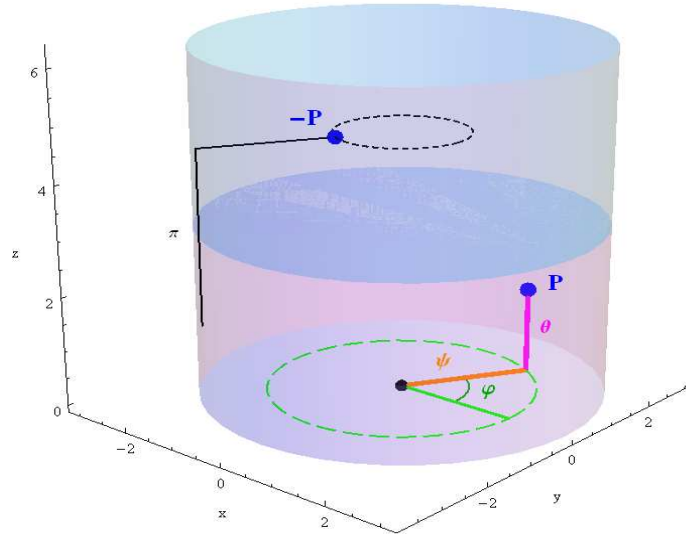


FIGURE 5 – Cylindre modélisant  $S^2 \times S^1$  avec le rayon  $\psi$ , l'angle  $\varphi$  et la hauteur  $\theta$  identifiés. Les deux points bleus correspondent à un vecteur quelconque  $\mathbf{P} \in \widehat{Ein}^{2,1}$  et son antipode  $-\mathbf{P}$  lorsqu'ils sont affichés dans le cylindre. Ces derniers montrent que la relation antipodale n'est pas conservée. La moitié inférieure rosée du cylindre représente  $(S^2 \times S^1)/\pm$  et, conséquemment,  $\widehat{Ein}^{2,1}$ . La restriction de  $\theta$  à l'intervalle  $[0, \pi)$  permet d'isoler cette moitié.

C'est cette forme qui est habituellement utilisée pour décrire les photons de l'univers d'Einstein. Avec elle, nous pouvons voir qu'un photon est, à un détail près, une droite. Cette observation nous permet d'établir un lien supplémentaire avec l'espace-temps de Minkowski dont les photons sont des droites. La différence ici est l'ajout de  $\{\mathbf{v}\}$  qui approche le comportement de  $\phi$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.

Les figures 6 à 8 contiennent des exemples de photons dans  $S^1 \times S^1$  et  $S^2 \times S^1$ . Nous encourageons le lecteur à tenter d'expliquer leur forme en appliquant les connaissances des dernières sous-sections. Cet exercice constitue une excellente occasion de se familiariser avec les représentations de l'univers d'Einstein.

### 3.2.4 Visualisation des cônes de lumière

Soit un vecteur  $\mathbf{x} \in \text{Ein}^{n-1,1}$ . La définition 3.7 présente le cône de lumière  $L(\mathbf{x})$  comme l'union de tous les photons passant par  $\mathbf{x}$ . Cependant, cette définition ne nous est utile que si nous avons une bonne connaissance des photons de  $\text{Ein}^{n-1,1}$ . Cela est le cas lorsque  $n = 2$ , car les photons sur  $S^1 \times S^1$  n'ont essentiellement que deux formes ou orientations. Pour élaborer, tout photon sur le tore admet une reparamétrisation où les angles  $\theta$  et  $\varphi$  varient au même rythme. Ainsi, seulement deux scénarios peuvent se présenter : ces angles évoluent dans la même direction ou dans des directions opposées. La figure 9 présente graphiquement les deux orientations. Pour chacune d'entre elles, il n'y a qu'un seul photon qui passe par notre vecteur  $\mathbf{x}$ . En conclusion,  $L(\mathbf{x})$  correspond simplement à l'union des deux photons qui s'intersectent en  $\mathbf{x}$ . La figure 10 montre un exemple de cône de lumière sur le tore.

Nous avons vu que les photons dans  $S^2 \times S^1$  prennent des formes plus variées. Par conséquent, la définition 3.7 n'est pas très pratique lorsque  $n = 3$  et il est préférable d'avoir recours au lemme 3.8 dans cette situation. En vertu de ce lemme, trouver le cône de lumière  $L(\mathbf{x})$  revient à résoudre l'équation  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$  par rapport à  $\mathbf{y} \in \text{Ein}^{2,1}$ . Cette tâche n'est pas toujours facile et son traitement déborde du cadre de l'article. Nous présentons un exemple de cône de lumière dans le cylindre à la figure 11.

## 4 Compactification

Plusieurs similitudes entre l'espace-temps de Minkowski et l'univers d'Einstein ont été explicitées ou laissées à l'œil attentif du lecteur dans la section précédente. Il est ainsi naturel de se demander quelle est la véritable nature de leur relation. Nous nous limitons ici à une réponse partielle et des explications incomplètes, mais ces dernières devraient tout de même donner une idée générale de la situation. La réponse partielle est la suivante :

**Proposition 4.1.** *L'univers d'Einstein  $\text{Ein}^{n-1,1}$  est une compactification de l'espace-temps de Minkowski  $\mathbb{R}^{n-1,1}$ .*

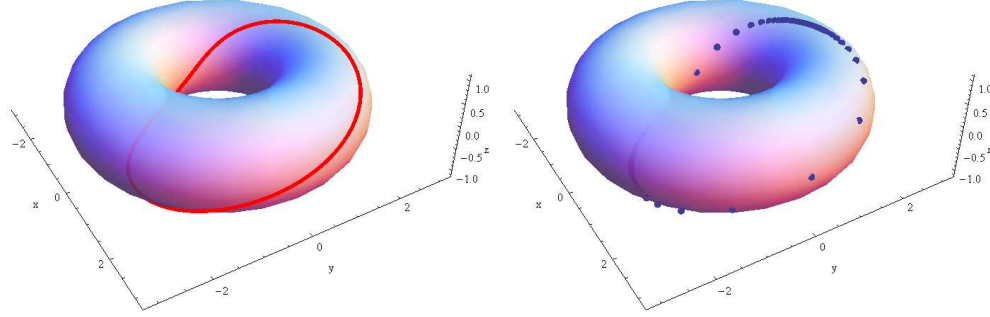


FIGURE 6 – Photon  $[1:t:1:t]^T \cup [0:1:0:1]^T$  de  $Ein^{1,1}$  représenté dans  $S^1 \times S^1$ . Dans l'image de gauche, nous prenons toutes les valeurs  $t \in \mathbb{R}$ . Dans celle de droite, nous prenons des valeurs discrètes de  $t$  par bond de  $1/2$ . Les points d'accumulation du photon correspondent aux limites  $t \rightarrow \pm\infty$ , soit  $[0:1:0:1]^T$ .

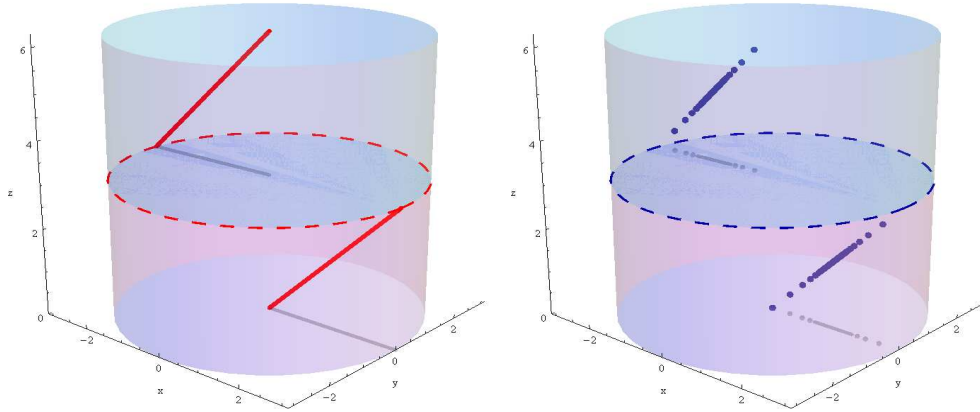


FIGURE 7 – Photon  $[1:t:0:t:1]^T \cup [0:1:0:1:0]^T$  de  $Ein^{2,1}$  représenté dans  $S^2 \times S^1$ . Dans l'image de gauche, nous prenons toutes les valeurs  $t \in \mathbb{R}$ . Dans celle de droite, nous prenons des valeurs discrètes de  $t$  par bond de  $1/2$ . Les limites  $t \rightarrow \pm\infty$  correspondent au point d'accumulation  $[0:1:0:1:0]^T$ . Le cercle pointillé indique l'atteinte de la frontière du disque de hauteur  $\pi$  par le photon. Puisque nous avons établi que cette frontière correspond à un unique point de  $\widehat{Ein}^{2,1}$ , nous l'avons colorée en entier. Des ombres grises ont été ajoutées à la figure afin d'améliorer la visualisation en trois dimensions.

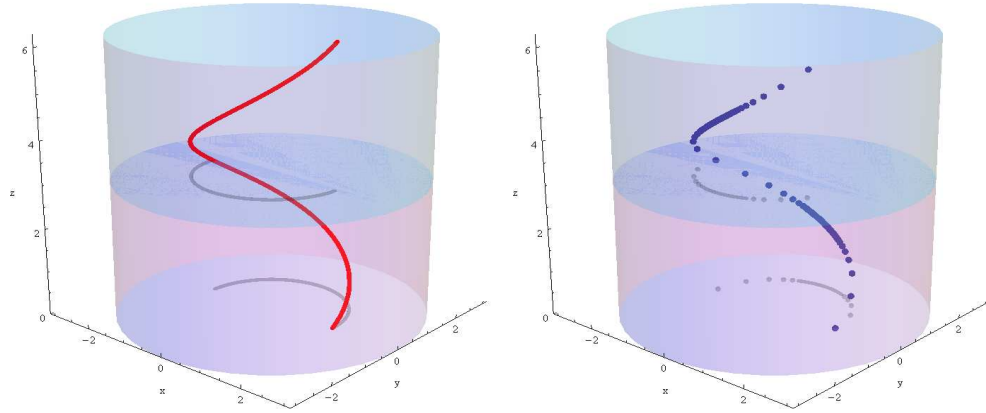


FIGURE 8 – Photon  $[0 : 1 : t : t : 1]^T \cup [0 : 0 : 1 : 1 : 0]^T$  de  $Ein^{2,1}$  représenté dans  $S^2 \times S^1$ . Dans l'image de gauche, nous prenons toutes les valeurs  $t \in \mathbb{R}$ . Dans celle de droite, nous prenons des valeurs discrètes de  $t$  par bond de  $1/2$ . Les limites  $t \rightarrow \pm\infty$  correspondent au point d'accumulation  $[0 : 0 : 1 : 1 : 0]^T$ . Le cylindre, étant utilisé comme solide plutôt que surface, permet des photons d'apparences plus variées que le tore. Des ombres grises ont été ajoutées à la figure afin d'améliorer la visualisation en trois dimensions.

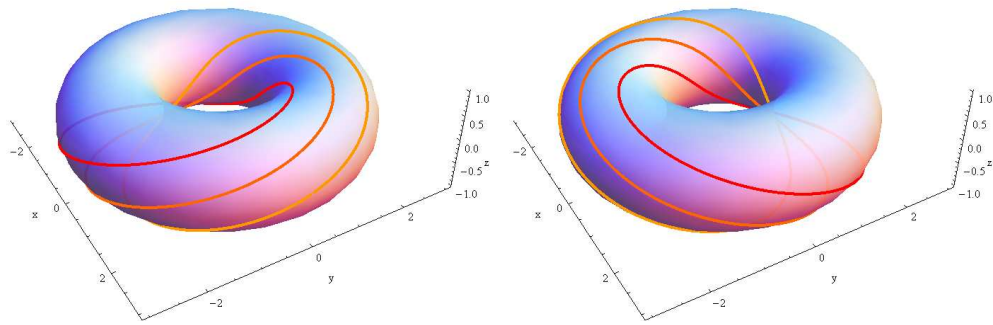


FIGURE 9 – Deux orientations possibles d'un photon de  $Ein^{1,1}$  sur le tore. Les angles  $\theta$  et  $\varphi$  évoluent dans la même direction pour les photons de l'image de gauche et dans des directions opposées pour ceux de l'image de droite.

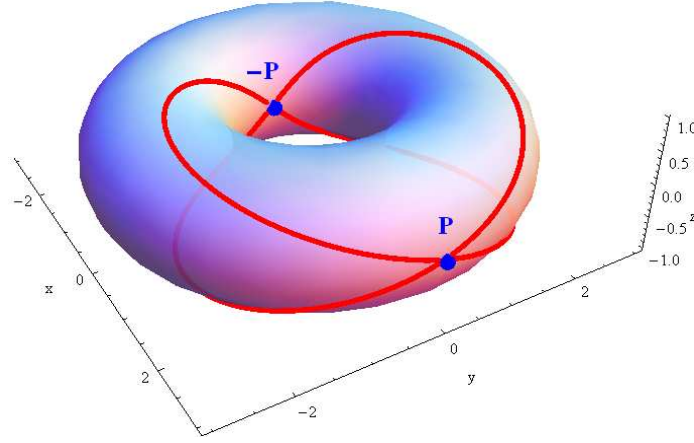


FIGURE 10 – Cône de lumière au point  $\mathbf{P}$  associé au vecteur  $[1:0:1:0]^T$  de  $E\text{in}^{1,1}$ . Ce cône n'est effectivement composé que de deux photons d'orientations différentes. Sa forme n'est pas sans rappeler celle des cônes dans le plan. Notons, de plus, qu'il passe par l'antipode  $-\mathbf{P}$  et est aussi son cône de lumière.

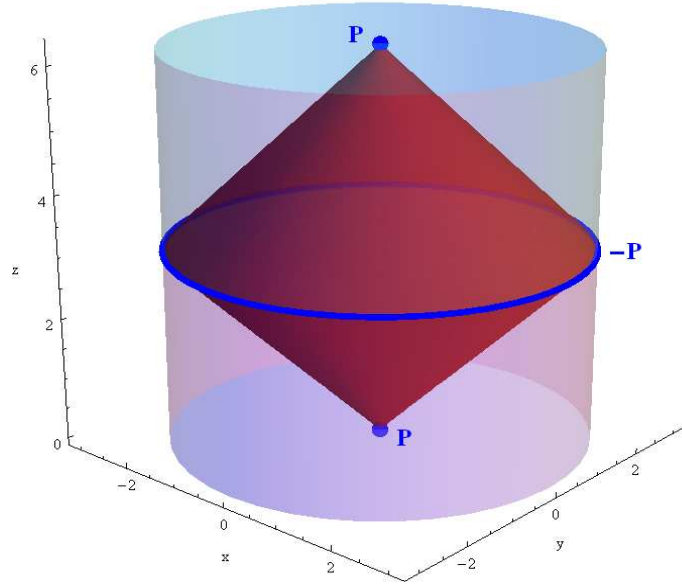


FIGURE 11 – Cône de lumière au point  $\mathbf{P}$  associé au vecteur  $\mathbf{x} = [1:0:0:0:1]^T$  de  $E\text{in}^{2,1}$ . L'équation  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$  se résout facilement et donne la condition  $y_1 - y_5 = 0$  sur  $\mathbf{y} \in E\text{in}^{2,1}$ . En vertu de la paramétrisation (6), les points qui composent le cône sont ceux où  $\cos\psi = \cos\theta$ . En plus de son apparence inversée par rapport aux cônes conventionnels, il passe par l'antipode  $-\mathbf{P}$  et est aussi son cône de lumière.

Cela nous dit essentiellement que l'univers d'Einstein est un compact et une « extension » de l'espace-temps de Minkowski. La première affirmation est une conséquence de la proposition 3.10. En effet, affirmer que  $Ein^{n-1,1}$  est homéomorphe à  $(S^{n-1} \times S^1)/\pm$  implique qu'il existe une bijection continue  $h$ , du premier ensemble au deuxième, dont l'inverse  $h^{-1}$  est aussi continue. Puisque les sphères  $S^m$  sont compactes, le produit cartésien  $S^{n-1} \times S^1$  l'est aussi. Le passage au quotient par la relation d'équivalence  $\pm$  préserve la compacité. Finalement, l'image d'un compact par une fonction continue étant compacte, la fonction  $h^{-1}$  nous mène au résultat. Ce sont là les grandes étapes du raisonnement et nous ne désirons pas aller plus loin dans la démonstration de la proposition 4.1. Le reste de la section est consacré à donner une conception simplifiée de ce résultat.

Dans  $\mathbb{R}^n$ , tout ensemble compact ne s'étend pas à l'infini : il est borné. Notre expérience avec les ensembles  $(S^{n-1} \times S^1)/\pm$  nous montre qu'ils sont aussi bornés. L'illustration des photons et des cônes de lumière dans ceux-ci est intéressante pour la raison que leurs points d'accumulation sont inclus. Pourtant, ces points correspondent à des limites à l'infini. Par comparaison, il est impossible de considérer les points infinis de l'espace-temps de Minkowski qui n'est pas borné.

C'est la lacune mentionnée ci-dessus qui permet à l'univers d'Einstein de rayonner : ce dernier « étend » l'espace-temps de Minkowski à l'infini. Un exemple particulièrement parlant pour illustrer cette réalité sont les photons. Rappelons qu'un photon  $\phi$  de  $Ein^{n-1,1}$ , qui est à la base un plan, peut être réécrit de la façon suivante :

$$\phi = \{\mathbf{u} + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbf{v}\}.$$

La première partie de cette union est la donnée d'une droite qui est de la forme d'un photon dans  $\mathbb{R}^{n-1,1}$ . Le point  $\mathbf{v}$  ne sera jamais atteint par la droite, mais cette dernière peut s'en approcher autant que possible lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Tout point de l'espace-temps de Minkowski peut être plongé dans l'univers d'Einstein et il en est de même pour ses objets. Nous ne donnons pas les détails, mais référons plutôt l'individu intéressé à la section 2 de [LD12].

## Références

- [Cal00] J. J. CALLAHAN : *The Geometry of Spacetime : An Introduction to Special and General Relativity*. Springer-Verlag New York, Inc., 2000.
- [LD12] R. LAREAU-DUSSAULT : Les surfaces croches de l'univers d'Einstein. maîtrise ès sciences, Université de Sherbrooke, 2012.

YANNICK LEBRUN

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: Yannick.Lebrun@USherbrooke.ca